Lehký úvod do dvou algoritmů postkvantové kryptografie

Mirek Kratochvíl

KSI MFF UK

RSA IS DEAD

ALSO: DHE, DSA, ElGamal, ECRSA, ECDSA+BTC, ECDHE, ...

Lepší motivace!

- předpokládat, že kvantové počítače nevzniknou je hloupost
- předpokládat, že současná šifrovaná data nebudou mít za 50–100 let cenu je naivní
- celosvětová kryptografická monokultura je nebezpečná
- post-kvantové algoritmy jsou často jednodušší i zajímavější

O čem bude přednáška

- McEliece kryptosystém
- Jak vyrobit digitální podpis z hashovací funkce?
- Co že to má ten kvantový počítač navíc?

O čem bude přednáška

- McEliece kryptosystém
- Jak vyrobit digitální podpis z hashovací funkce?
- Co že to má ten kvantový počítač navíc?

Spoiler: Codecrypt the post-quantum cryptography tool

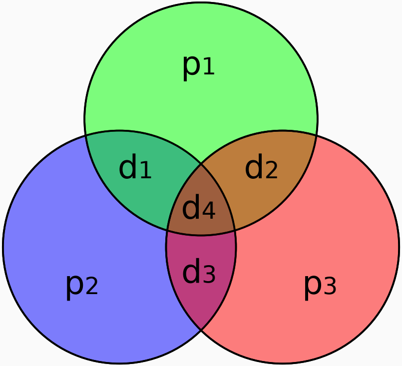
`https://github.com/exaexa/codecrypt`

(`apt-get install codecrypt / emerge codecrypt`)

McEliece

MiniMcEliece

Hammingův obecně známý samoopravný kód



Hammingův $(7, 4, 1)$-kód formálně.

Generátor:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4,7}$$

Kontrola parity:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3,7}$$

MiniMcEliece

Chvíli budeme naivně předpokládat, že nepřítel neumí myslet.
(např. že nepřítel je jogurt)

Zakódujeme zprávu (0 1 0 1) Hammingovým kódem:

$$\mathbf{m} = (0\ 1\ 0\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0)$$

Jeden náhodný bit zprávy úmyslně rozbijeme:

$$\mathbf{c} = \mathbf{m} \oplus \mathbf{e} = (0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0)$$

MiniMcEliece

Nepřátelský jogurt vidí:

$$(0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0)$$

Protože ale *neumí opravovat Hammingovy kódy*, netuší, která zpráva z následujících 4 byla původní:

$$(1\ 1\ 1\ 1), (0\ 0\ 1\ 1), (0\ 1\ 0\ 1), (0\ 1\ 1\ 0)$$

MiniMcEliece

Nepřátelský jogurt vidí:

$$(0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0)$$

Protože ale *neumí opravovat Hammingovy kódy*, netuší, která zpráva z následujících 4 byla původní:

$$(1\ 1\ 1\ 1), (0\ 0\ 1\ 1), (0\ 1\ 0\ 1), (0\ 1\ 1\ 0)$$

Obecně: při t chybách v n písmenech vznikne $\binom{n}{t}$ možností:

$\binom{4}{1} = 4 \qquad \binom{8}{2} = 28 \qquad \binom{100}{10} \approx 1.73 \cdot 10^{13} \approx 2^{43}$

$\binom{1024}{38} \approx 10^{69} \approx \mathbf{2^{230}}$

McEliece kryptosystém

Z toho můžeme vyrobit asymetrickou šifru!

Tajný klíč Samoopravný kód s dostatečným n a t, který nepřítel neumí opravit.

Veřejný klíč Odpovídající matice $\mathbf{G}$, ze které se informace o opravování kódu nedá zjistit.

Šifrování Zprávu vynásobíme $\mathbf{G}$, znečitelníme ji přidáním chyb a odešleme.

Rozšifrování Pomocí znalosti o opravování kódu odstraníme chyby.

McEliece kryptosystém

Z toho můžeme vyrobit asymetrickou šifru!

Tajný klíč Samoopravný kód s dostatečným n a t, který nepřítel neumí opravit.

Veřejný klíč Odpovídající matice $\mathbf{G}$, ze které se informace o opravování kódu nedá zjistit.

Šifrování Zprávu vynásobíme $\mathbf{G}$, znečitelníme ji přidáním chyb a odešleme.

Rozšifrování Pomocí znalosti o opravování kódu odstraníme chyby.

Problémy:

- Kde vzít takový samoopravný kód?
- Velikost $\mathbf{G}$
- Tohke bez#potízí pře2tu.

McEliece kryptosystém

- Kde vzít takový samoopravný kód?

  Гоппа, В. Д. *Новый класс линейных корректирующих кодов*. Проблемы передачи информации, Том. VI., Вып. 3, 1970.

Goppovy algebraické kódy jsou poměrně složité, ale kryptosystém funguje!

`https://en.wikipedia.org/wiki/Binary_Goppa_code`

McEliece kryptosystém

- Tohke bez#potízí pře2tu.

  Problém: Lidské jazyky obsahují docela dost redundance na to, aby se jednobitové chyby daly opravit.

  Řešení je víc:

  - Vzít náhodnou invertibilní matici a vynásobit s ní **G**.
  - Zašifrovat symetrický klíč a zprávu připojit zašifrovanou symetricky. (Fujisaki-Okamoto padding)

McEliece kryptosystém

- Velikost **G**.
  Veřejný klíč má $\mathcal{O}(n^2)$ bitů, pro původní parametry asi 100kB!
  (pro srovnání: `ssh-ed25519 AAAAC3NzaC1lZDI1NTE5A-`
  `AAAAIK4bCej3ZCkxHcXLZKLvnlmlwA2Ettb8BeUrkirnmVSb`
  `user@host`)

Řešení: **G** s jednoduchou vnitřní strukturou!

MDPC

Cyklické matice mají pěknou vnitřní strukturu, k uložení celé stačí opsat první řádek.

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

Idea:

- Když vyrobíme cyklickou matici $\mathbf{H}$, můžeme z ní spočítat i cyklickou $\mathbf{G}$!

MDPC

Cyklické matice mají pěknou vnitřní strukturu, k uložení celé stačí opsat první řádek.

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

Idea:

- Když vyrobíme cyklickou matici $\mathbf{H}$, můžeme z ní spočítat i cyklickou $\mathbf{G}$!
- Shodou okolností existují vhodné samoopravné kódy s cyklickou $\mathbf{H}$.

Výsledný kryptosystém se jmenuje MDPC.

MDPC

Matice **H** se vyrobí cyklením nějakého *řídkého* vektoru:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ & & \vdots & & & & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

G se vyrobí trochou lineární algebry.

Zjednodušená korekce chyb v MDPC

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\text{kódové slovo}} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\text{syndrom}}$$

Který bit může za nejvíc jedniček v syndromu?

Zjednodušená korekce chyb v MDPC

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Zjednodušená korekce chyb v MDPC

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

MDPC

Implementace MDPC je poměrně rychlá a klíče jsou dostatečně malé.

```
$ ccr -p -F @8dc |wc -c
1346

$ ccr -er exa |ccr -d
asd
incoming encrypted message details:
  algorithm: MCEQCMDPC128FO-CUBE256-CHACHA20
  recipient: @8dc45217e14d3fdc244f8578e788b3f91c75...
  recipient local name: ‘exa’
asd
```

Digitální podpis z hashů

Ale hashovací funkce jsou symetrické?

Kryptografické hashovací funkce se běžně používají jako symetrická kryptografie.

Ověření konzistence přenesené informace:

$$H(\text{sent}) \stackrel{?}{=} H(\text{received})$$

Ověření autenticity zprávy:

$$H(\text{sent}||k) \stackrel{?}{=} H(\text{received}||k)$$

Asymetrický digitální podpis je trochu složitější.

Lamport OTS

Zkusíme aspoň jednorázový podpis jednoho bitu.

Vygenerujeme 2 náhodné řetězce:

- S0: `bb2f841c80976e985bd161557d952309c44c3ddd`
- S1: `141f87be1330a105a87923f4ee6383bd7de46541`

Z obou spočítáme hash:

- H0: `8f431d33712287ea7cf0663553aa000de4595125`
- H1: `67573f94f164e5bfdf8bce2dec6486100e716dd0`

Hashe H0,H1 zveřejníme, původní řetězce S0,S1 uschováme.

Lamport OTS

Chceme podepsat jednobitovou zprávu '0':

- Jako podpis nuly zveřejníme s=S0.
- Smažeme S1.
- Pro ověření spočítáme H(s) a podpis akceptujeme, když je výsledek stejný jako H0.

Kdyby nepřítel chtěl zprávu '1' prohlásit za validní, musel by někde sehnat S1 nebo invertovat hash H1.

Víc podpisů ale udělat nejde.

Lamport OTS

Schéma jde rozšířit i na n bitů. Privátní klíč bude:

$$\begin{gathered}\text{S0-1, S0-2, S0-3, S0-4, } \ldots \text{, S0-}n \\ \text{S1-1, S1-2, S1-3, S1-4, } \ldots \text{, S1-}n\end{gathered}$$

Veřejný:

$$\begin{gathered}\text{H0-1, H0-2, H0-3, H0-4, } \ldots \text{, H0-}n \\ \text{H1-1, H1-2, H1-3, H1-4, } \ldots \text{, H1-}n\end{gathered}$$

Zprávu hashujeme na n bitů a každý bit podepíšeme odděleně.

Veřejný i soukromý klíč mají velikost $2n^2$ bitů (jde to stáhnout na $n(n + log_2 n)$).

Opakované podpisy

Jak vyrobit znovupoužitelný digitální podpis?

Opakované podpisy

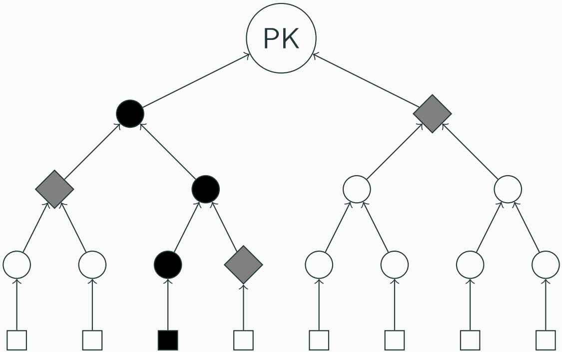
Jak vyrobit znovupoužitelný digitální podpis?

1. Vygenerujeme hromadu párů klíčů pro Lamportův podpis. :)
2. Zveřejníme všechny veřejné klíče.
3. Pro každý podpis použijeme postupně jednu dvojici klíčů!

Problém: ‘hromada’ je moc velký veřejný klíč.

Merkle Trees

Řešení: Všechny veřejné klíče zahashujeme Merkleho stromem a zveřejníme jen vrchol stromu.



i-tý opakovatelný podpis se skládá z *i*-tého jednorázového podpisu a sousedů cesty v Merkleho stromě.

Hash-based signatures

Běžné technické potíže:

- není potřeba pamatovat si všechny S
  — stačí PRNG

Hash-based signatures

Běžné technické potíže:

- není potřeba pamatovat si všechny S
  — stačí PRNG
- není potřeba mít celý strom v paměti
  — postupné generování např. FMTSeq

Hash-based signatures

Běžné technické potíže:

- není potřeba pamatovat si všechny S
  — stačí PRNG
- není potřeba mít celý strom v paměti
  — postupné generování např. FMTSeq
- spodní patro stromu není potřeba generovat najednou
  — místo hashů se ve stromě použijí podpisy

Hash-based signatures

Běžné technické potíže:

- není potřeba pamatovat si všechny S
  — stačí PRNG
- není potřeba mít celý strom v paměti
  — postupné generování např. FMTSeq
- spodní patro stromu není potřeba generovat najednou
  — místo hashů se ve stromě použijí podpisy
- podpisů může být i nekonečno
  — few-time signatures ve SPHINCS256

Hash-based signatures

Běžné technické potíže:

- není potřeba pamatovat si všechny S
  — stačí PRNG
- není potřeba mít celý strom v paměti
  — postupné generování např. FMTSeq
- spodní patro stromu není potřeba generovat najednou
  — místo hashů se ve stromě použijí podpisy
- podpisů může být i nekonečno
  — few-time signatures ve SPHINCS256
- podpisy jsou poměrně velké, ale ne tak strašně

Podpisy v Codecryptu

```
$ ccr -pF @9b3 |wc -c
109

$ ccr -s |ccr -v
Nazdar
fmtseq notice: 65131 signatures remaining
incoming signed message details:
  algorithm: FMTSEQ128C-CUBE256-CUBE128
  signed by: @9b399912a7f0561839b1048f8a9f81a369a....
  signed local name: `exa'
  verification status: GOOD signature ;-)
Nazdar
```

Náhled na složitost

Jak je složitý nějaký problém?

Pichlavá otázka: Co když jsme náhodou ještě nepřišli na existující jednoduchý algoritmus, který např. invertuje hashovací funkce?

Jak je složitý nějaký problém?

Pichlavá otázka: Co když jsme náhodou ještě nepřišli na existující jednoduchý algoritmus, který např. invertuje hashovací funkce?

Pichlavá odpověď: Stalo by se dost podivných věcí!

Jak je složitý nějaký problém?

Pichlavá otázka: Co když jsme náhodou ještě nepřišli na existující jednoduchý algoritmus, který např. invertuje hashovací funkce?
Pichlavá odpověď: Stalo by se dost podivných věcí!

- Premisa: Spočítat NP v polynomiálním čase je podivné.

Jak je složitý nějaký problém?

Pichlavá otázka: Co když jsme náhodou ještě nepřišli na existující jednoduchý algoritmus, který např. invertuje hashovací funkce?
Pichlavá odpověď: Stalo by se dost podivných věcí!

- Premisa: Spočítat NP v polynomiálním čase je podivné.
- Kdyby šel SAT spočítat v P, můžu s ním v P simulovat nedeterministický Turingův stroj, takže spočítám cokoliv z NP. (Cook-Levin)

Jak je složitý nějaký problém?

Pichlavá otázka: Co když jsme náhodou ještě nepřišli na existující jednoduchý algoritmus, který např. invertuje hashovací funkce?
Pichlavá odpověď: Stalo by se dost podivných věcí!

- Premisa: Spočítat NP v polynomiálním čase je podivné.
- Kdyby šel SAT spočítat v P, můžu s ním v P simulovat nedeterministický Turingův stroj, takže spočítám cokoliv z NP. (Cook-Levin)
- Když někdo umí najít řešení problému s Hamiltonovskou kružnicí, umí spočítat i SAT, tj. i NP, tj. je to podivné.

Jak je složitý nějaký problém?

Pichlavá otázka: Co když jsme náhodou ještě nepřišli na existující jednoduchý algoritmus, který např. invertuje hashovací funkce?
Pichlavá odpověď: Stalo by se dost podivných věcí!

- Premisa: Spočítat NP v polynomiálním čase je podivné.
- Kdyby šel SAT spočítat v P, můžu s ním v P simulovat nedeterministický Turingův stroj, takže spočítám cokoliv z NP. (Cook-Levin)
- Když někdo umí najít řešení problému s Hamiltonovskou kružnicí, umí spočítat i SAT, tj. i NP, tj. je to podivné.
- ...
- Když někdo spočítá problém dekódování syndromu (SD), vyřeší (tranzitivně) i cokoliv z NP!

Jak je složitý nějaký problém?

Pichlavá otázka: Co když jsme náhodou ještě nepřišli na existující jednoduchý algoritmus, který např. invertuje hashovací funkce?

Pichlavá odpověď: Stalo by se dost podivných věcí!

- Premisa: Spočítat NP v polynomiálním čase je podivné.
- Kdyby šel SAT spočítat v P, můžu s ním v P simulovat nedeterministický Turingův stroj, takže spočítám cokoliv z NP. (Cook-Levin)
- Když někdo umí najít řešení problému s Hamiltonovskou kružnicí, umí spočítat i SAT, tj. i NP, tj. je to podivné.
- ...
- Když někdo spočítá problém dekódování syndromu (SD), vyřeší (tranzitivně) i cokoliv z NP!

Takže zlomit McEliece by bylo minimálně dost podezřelé.

RSA vs. složitost

Obecně se věří, že:

$$RSA, DLog \notin NPC$$

Shor 1993:

$$RSA, DLog \in BQP$$

RSA vs. složitost

Obecně se věří, že:

$$RSA, DLog \notin NPC$$

Shor 1993:

$$RSA, DLog \in BQP$$

Co že ty kvantové počítače vlastně dělají?

QC

K čemu jsou qubity? (velmi zjednodušený pohled)

- Jeden qubit je dvoustavová pravděpodobnostní paměť s neomezenou kapacitou rozložení pravděpodobnosti.
- Víc qubitů jde spojovat (entanglovat), složitost rozložení roste exponenciálně.
- Rozložení jde rozumně ovlivňovat kvantovými obvody.
- Při měření stavu qubitu celé rozložení zkolabuje a vrátí nějakou relativně pravděpodobnou možnost.

Pro kryptografii jsou zásadní 2 algoritmy:

- Grover search — hledání v nesetříděné posloupnosti v $\mathcal{O}(n^{\frac{1}{2}})$.
- Shor factorization — rozbíjení RSA modulu a diskrétního logaritmu.

Shorův algoritmus

Redukuje problém na hledání periody r funkce $f(x) = a^x \mod N$ pro náhodné a.

V kvantovém počítači můžeme:

1. f vhodně aplikovat najednou na všechny x
2. Výsledek prohnat kvantovou Fourierovou transformací
3. Výsledek QFT změřit.

Měření které periodu f jasně ukazuje je velice pravděpodobné.

Dělitele N jsou:

- $\gcd(a^{\frac{r}{2}} - 1, N)$
- $\gcd(a^{\frac{r}{2}} + 1, N)$

Drobný výhled do budoucnosti

Co dál?

- Existují další kryptosystémy!
  - NTRU, NewHope, Stern, MQ, ...
  - SIDH-KEX `https://github.com/elkablo/pqc`

Co dál?

- Existují další kryptosystémy!
  - NTRU, NewHope, Stern, MQ, ...
  - SIDH-KEX `https://github.com/elkablo/pqc`
- Integrace postkvantových prvků do běžných knihoven už probíhá (pomalu)
- Hodně příležitostí vyrobit nový zajímavý software (především pro studenty!)

Konec!

Q&A?